Unidad VI: Sistemas discretos (continuación)

Objetivo específico: Entender ampliamente el fenómeno del comportamiento de los modelos matemáticos para la resolución de problemas enfocados a las ecuaciones lineales en sistemas discretos.

Conceptos a desarrollar en la unidad: Dar al alumno las herramientas necesarias, para que pueda efectuar el análisis de los sistemas lineales discretos y continuos en la aplicación de las ecuaciones en los sistemas discretos.

6.1 Respuesta al impulso[1]

La respuesta a un impulso o respuesta impulsiva de un sistema es la que se presenta en la salida cuando en la entrada se introduce un impulso. Un impulso es el caso límite de un pulso infinitamente corto en el tiempo pero que mantiene su área o integral (por lo cual tiene un pico de amplitud infinitamente alto). Aunque es imposible obtener amplitud infinita en un intervalo infinitamente corto en cualquier sistema real, es un concepto útil como idealización, debido principalmente a la simplicidad de su uso en la integración.

Bases matemáticas

Matemáticamente, un impulso se representa por una función Delta de Dirac. Cuando se trabaja con sistemas discretos el impulso se aproxima por medio de un pulso que tiene área unidad y de ancho tiene el periodo de tiempo entre dos muestras. Si el tiempo entre dos muestras consecutivas x[n] y x[n+1] lo tomamos como, τ, entonces el valor del impulso será el inverso de $\frac{1}{\tau}$, de modo que el área, que es su producto, valga la unidad. En la explicación posterior de los Sistemas Discretos se toma, $\tau = 1$, de modo que su inverso también lo será, pero hay que tener en cuenta para el procesamiento de señales en las que la base de tiempo sea diferente ajustar este parámetro para no cambiar la energía de la señal de salida erróneamente.

Supongamos que T es un sistema discreto, es decir, que toma una entrada x[n] y produce una salida y[n]:

$$y[n] = T\{x[n]\}$$

Por lo tanto T es un operador actuando sobre sucesiones (a través de los números enteros), produciendo nuevas sucesiones. Tener en cuenta que T no es el sistema, sino una representación matemática del sistema. T puede ser no lineal, por ejemplo:

$$T\{x[n]\} = x^2[n]$$

O lineal, como:

$$T\{x[n]\} = x[n-1].$$

Supongamos que T es lineal. Entonces

$$T\{x[n] + y[n]\} = T\{x[n]\} + T\{y[n]\}$$

Y

---

[1] Johnsonbaugh, Richard (2005). Matemáticas Discretas.

$$T\{\lambda x[n]\} = \lambda T\{x[n]\}$$

Supongamos también que T es invariante en el entorno, es decir que si $y[n] = T\{x[n]\}$ entonces $y[n-k] = T\{x[n-k]\}$. En tal sistema cualquier salida puede calcularse en términos de la entrada y de la sucesión, **respuesta a impulso**, quedando caracterizado el sistema por completo. Esto puede verse de la siguiente manera: Tomando la identidad

$$x[n] = \sum_k x[k]\,\delta[n-k]$$

y aplicando T en ambos lados

$$T\{x[n]\} = T\left\{\sum_k x[k]\,\delta[n-k]\right\}$$

Por supuesto, esto tiene sentido sólo si

$$\sum_k x[k]\,\delta[n-k]$$

Cae en el dominio de T. Pero como T es lineal e invariante en el entorno podemos escribir

$$T\{x[n]\} = \sum_k x[k]\,T\{\delta[n-k]\}$$

Y como la salida y[k] está dada por

$$y[k] = T\{x[k]\}$$

Podemos escribir

$$y[n] = \sum_k x[k]\,T\{\delta[n-k]\}$$

Reemplazando la salida del sistema a la $\delta[n-k]$, obtendremos, por definición, la respuesta impulsiva

$$h[n-k] = T\{\delta[n-k]\}$$

Como se observa, $h[n]$es la salida del sistema cuando su entrada es un impulso discreto, una delta de Dirac discreta.

Sustituyendo, obtenemos finalmente

$$y[n] = \sum_k x[k]\,h[n-k]$$

La sucesión $h[n]$es la respuesta a impulso del sistema representado por T.

Se obtienen resultados similares en sistemas de tiempo continuo.

Como ejemplo conceptual considere un globo dentro de un recinto, ubicado en un punto p. El globo explota y hace un sonido similar a un "pum". Aquí el recinto es un sistema T que toma el sonido "pum" y lo dispersa a través de múltiples reflexiones. La entrada $\delta_p[n]$ es el "pum", similar (debido en parte a su corta duración) a un delta de Dirac, y la salida $h\,[n\,,p]$ es la sucesión del sonido afectado por el sistema, y depende de la ubicación (punto p) del globo. Si conocemos $h\,[n\,,p]$ para cada punto del recinto conocemos la respuesta a impulso por completo del salón, y es posible predecir la respuesta del mismo a cualquier sonido producido en él.

Aplicaciones matemáticas

En lenguaje matemático, la respuesta a impulso de una transformación lineal es la imagen de la función Delta de Dirac sobre la transformación.

La transformada de Laplace de una respuesta a impulso es conocida como la función de transferencia. Usualmente es más fácil analizar sistemas usando funciones de transferencia en contraposición a las funciones de respuestas a impulso. La transformada de Laplace de la salida de un sistema puede determinarse mediante el producto entre la función de transferencia y la función entrada en el plano complejo, también conocido como el dominio espectral o de frecuencias. La transformada inversa de Laplace de éste resultado dará como resultado la función salida en el dominio temporal.

Para determinar la función de salida en el dominio temporal se requiere de la convolución de la función de entrada con la función de respuesta a impulso. Esto requiere el uso de integrales, y normalmente resulta más dificultoso que simplemente multiplicar dos funciones en el dominio espectral.

Aplicaciones prácticas

En los sistemas reales no es posible generar un impulso perfecto para aplicar como prueba en ninguna entrada. Por lo tanto, se usan aproximaciones de pulsos muy breves. Debido a que el pulso es suficientemente corto comparado a la respuesta a impulso, el resultado obtenido será bastante cercano a la respuesta a impulso teórica. Por otro lado, es posible obtener la respuesta al impulso de un sistema utilizando métodos indirectos de Procesamiento de Señales, como ser la aplicación de un estímulo conocido y luego proceder la deconvolución entre éste y la respuesta del sistema bajo estudio.

6.1 El análisis de sistemas lineales[2]

En matemáticas y álgebra lineal, un sistema de ecuaciones lineales, también conocido como sistema lineal de ecuaciones o simplemente sistema lineal, es un conjunto de ecuaciones lineales (es decir, un sistema de ecuaciones en donde cada ecuación es de primer grado), definidas sobre un cuerpo o un anillo conmutativo. Un ejemplo de sistema lineal de ecuaciones sería el siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & -2 \\ -x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

El problema consiste en encontrar los valores desconocidos de las variables x1, x2 y x3 que satisfacen las tres ecuaciones.

---

[2] George Nakos y David Joyner(1999) **Álgebra Lineal** con Aplicaciones, Primera edición en español.

El problema de los sistemas lineales de ecuaciones es uno de los más antiguos de la matemática y tiene una infinidad de aplicaciones, como en procesamiento digital de señales, análisis estructural, estimación, predicción y más generalmente en programación lineal así como en la aproximación de problemas no lineales de análisis numérico.

En general, un sistema con m ecuaciones lineales y n incógnitas puede ser escrito en forma normal como:

$$\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & =b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & =b_m \end{array}$$

Donde $x_1, \dots, x_n$son las incógnitas y los números $a_{ij} \in \mathbb{K}$son los coeficientes del sistema sobre el cuerpo $\mathbb{K}\ [= \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots]$. Es posible reescribir el sistema separando con coeficientes con notación matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

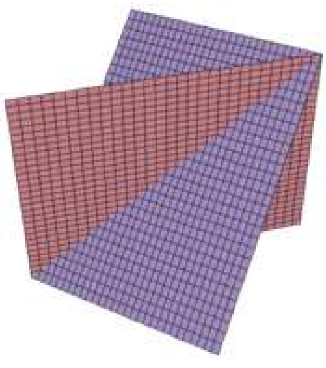
Si representamos cada matriz con una única letra obtenemos:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Donde A es una matriz m por n, x es un vector columna de longitud n y b es otro vector columna de longitud m. El sistema de eliminación de Gauss-Jordan se aplica a este tipo de sistemas, sea cual sea el cuerpo del que provengan los coeficientes. La matriz A se llama matriz de coeficientes de este sistema lineal. A b se le llama vector de términos independientes del sistema y a x se le llama vector de incógnitas.

Sistemas lineales reales

Los sistemas de ecuaciones lineales sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, es decir, los sistemas lineales en los cuales los coeficientes de las ecuaciones son números reales.



Gráfica 6.1.1Representación gráfica

La intersección de dos planos que no son paralelos coincidentes es una recta.

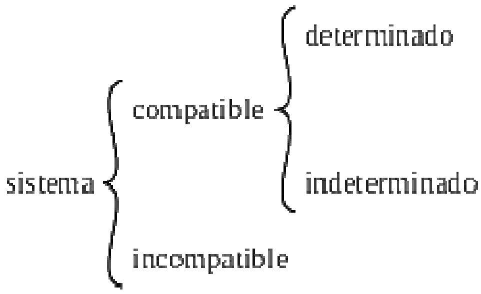
Un sistema con $n$incógnitas se puede representar en el n-espacio correspondiente;

En los sistemas con 2 incógnitas, el universo de nuestro sistema será el plano bidimensional, mientras que cada una de las ecuaciones será representada por una recta. La solución será el punto (o línea) donde se intersequen todas las rectas representan a las ecuaciones. Si no existe ningún punto en el que se intersequen al mismo tiempo todas las líneas, el sistema es incompatible, o lo que es lo mismo, no tiene solución.

En el caso de un sistema con 3 incógnitas, el universo será el espacio tridimensional, siendo cada ecuación un plano dentro del mismo. Si todos los planos intersecan en un único punto, las coordenadas de este serán la solución al sistema. Si, por el contrario, la intersección de todos ellos es una recta o incluso un plano, el sistema tendrá infinitas soluciones, que serán las coordenadas de los puntos que forman dicha línea o superficie.

Para sistemas de 4 o más incógnitas, la representación gráfica no existe, por lo que dichos problemas no se enfocan desde esta óptica.

Tipos de sistemas



Los sistemas de ecuaciones se pueden clasificar según el número de soluciones que pueden presentar. De acuerdo con ese caso se pueden presentar los siguientes casos:

Sistema compatible si tiene solución, en este caso además puede distinguirse entre:

- Sistema compatible determinado cuando tiene una única solución.
- Sistema compatible indeterminado cuando admite un conjunto infinito de soluciones.
- Sistema incompatible si no tiene solución.

Quedando así la clasificación:

Los sistemas incompatibles geométricamente se caracterizan por (hiper)planos o rectas que se cruzan sin cortarse. Los sistemas compatibles determinados se caracterizan por un conjunto de (hiper)planos o rectas que se cortan en un único punto. Los sistemas compatibles indeterminados se caracterizan por (hiper)planos que se cortan a lo largo de una recta [o más generalmente un hiperplano de dimensión menor]. Desde un punto de vista algebraico los sistemas compatibles determinados se caracterizan porque el determinante de la matriz es diferente de cero:

$$\text{Sistema compatible determinado} \Longleftrightarrow \det(\mathbf{A}) \neq 0$$

Algoritmo para determinar si un sistema es compatible

Podemos averiguar si un sistema es o no compatible mediante el Teorema de Rouché-Frobenius que establece que un sistema de ecuaciones lineales es compatible sólo si el rango de su matriz ampliada coincide con el de su matriz de coeficientes. Supongamos que el sistema es compatible. Si el valor común de los rangos de las matrices coincide con el número de variables, el sistema es compatible determinado; en caso contrario, es compatible indeterminado.

Sistemas compatibles indeterminados

Un sistema sobre un cuerpo K es compatible indeterminado cuando posee un número infinito de soluciones. Por ejemplo, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x & +2y & = 1 \\ 2x & +4y & = 2 \end{cases}$$

Tanto la primera como la segunda ecuación se corresponden con la recta cuya pendiente es $-0,5$y que pasa por el punto $(-1,1)$, por lo que ambas intersecan en todos los puntos de dicha recta. El sistema es compatible por haber solución o intersección entre las rectas, pero es indeterminado al ocurrir esto en infinitos puntos.

- En este tipo de sistemas, la solución genérica consiste en expresar una o más variables como función matemática del resto. En los sistemas lineales compatibles indeterminados, al menos una de sus ecuaciones se puede hallar como combinación lineal del resto, es decir, es lineal mente dependiente.
- La condición necesaria para que un sistema sea compatible indeterminado es que el determinante de la matriz del sistema sea cero al igual que el rango de la matriz ampliada y menor al número de incógnitas(y por tanto uno de sus autovalores será 0):

$$\text{sistema compatible indeterminado} \Rightarrow \det \mathbf{A} = 0$$

- De hecho, de las dos condiciones anteriores se desprende, que el conjunto de soluciones de un sistema compatible indeterminado es un subespacio vectorial. Y la dimensión de ese espacio vectorial coincidirá con la multiplicidad geométrica del auto valor cero.

Sistemas incompatibles

De un sistema se dice que es incompatible cuando no presenta ninguna solución. Por ejemplo, supongamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x & +2y & = 4 \\ 2x & +4y & = 7 \end{cases}$$

Las ecuaciones se corresponden gráficamente con dos rectas, ambas con la misma pendiente, Al ser paralelas, no se cortan en ningún punto, es decir, no existe ningún valor que satisfaga a la vez ambas ecuaciones.

Matemáticamente un sistema de estos es incompatible cuando el rango de la matriz del sistema es inferior al rango de la matriz ampliada. Una condición necesaria para que esto suceda es que el determinante de la matriz del sistema sea cero:

$$\text{sistema incompatible} \Rightarrow \det \mathbf{A} = 0$$

Métodos de solución a sistemas de ecuaciones lineales

Sustitución

El método de sustitución consiste en despejar en una de las ecuaciones cualquier incógnita, preferiblemente la que tenga menor coeficiente y a continuación sustituirla en otra ecuación por su valor.

En caso de sistemas con más de dos incógnitas, la seleccionada debe ser sustituida por su valor equivalente en todas las ecuaciones excepto en la que la hemos despejado. En ese instante, tendremos un sistema con una ecuación y una incógnita menos que el inicial, en el que podemos seguir aplicando este método reiteradamente. Por ejemplo, supongamos que queremos resolver por sustitución este sistema:

$$\begin{cases} 3x & +y & = & 22 \\ 4x & -3y & = & -1 \end{cases}$$

En la primera ecuación, seleccionamos la incógnita $y$por ser la de menor coeficiente y que posiblemente nos facilite más las operaciones, y la despejamos, obteniendo la siguiente ecuación.

$$y = 22 - 3x$$

El siguiente paso será sustituir cada ocurrencia de la incógnita $y$en la otra ecuación, para así obtener una ecuación donde la única incógnita sea la x.

$$4x - 3(22 - 3x) = -1 \qquad \Rightarrow 4x - 66 + 9x = -1 \qquad \Rightarrow 13x - 66 = -1, \qquad \Rightarrow 13x = 65$$

Al resolver la ecuación obtenemos el resultado $x = 5$, y si ahora sustituimos esta incógnita por su valor en alguna de las ecuaciones originales obtendremos $y = 7$, con lo que el sistema queda ya resuelto.

Igualación

El método de igualación se puede entender como un caso particular del método de sustitución en el que se despeja la misma incógnita en dos ecuaciones y a continuación se igualan entre sí la parte derecha de ambas ecuaciones.

Tomando el mismo sistema utilizado como ejemplo para el método de sustitución, si despejamos la incógnita $y$en ambas ecuaciones nos queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases} y = & 22 - 3x \\ y = & \dfrac{4x + 1}{3} \end{cases}$$

Como se puede observar, ambas ecuaciones comparten la misma parte izquierda, por lo que podemos afirmar que las partes derechas también son iguales entre sí.

$$22 - 3x = \frac{4x + 1}{3} \Rightarrow \qquad 3(22 - 3x) = 4x + 1 \Rightarrow \qquad 65 = 13x \Rightarrow \qquad x = 5$$

Una vez obtenido el valor de la incógnita x, se sustituye su valor en una de las ecuaciones originales, y se obtiene el valor de la y.

La forma más fácil de tener el método de sustitución es realizando un cambio para despejar x después de averiguar el valor de la y.

Reducción

Este método suele emplearse mayoritariamente en los sistemas lineales, siendo pocos los casos en que se utiliza para resolver sistemas no lineales. El procedimiento, diseñado para sistemas con dos ecuaciones e incógnitas, consiste en transformar una de las ecuaciones (generalmente, mediante productos), de manera que obtengamos dos ecuaciones en la que una misma incógnita aparezca con el mismo coeficiente y distinto signo. A continuación, se suman ambas ecuaciones produciéndose así la reducción o cancelación de dicha incógnita, obteniendo así una ecuación con una sola incógnita, donde el método de resolución es simple.

Por ejemplo, en el sistema:

$$\begin{cases} 2x & +3y & = 5 \\ 5x & +6y & = 4 \end{cases}$$

No tenemos más que multiplicar la primera ecuación por -2para poder cancelar la incógnita y. Al multiplicar, dicha ecuación nos queda así:

$$-2(2x + 3y = 5) \quad \longrightarrow \quad -4x - 6y = -10$$

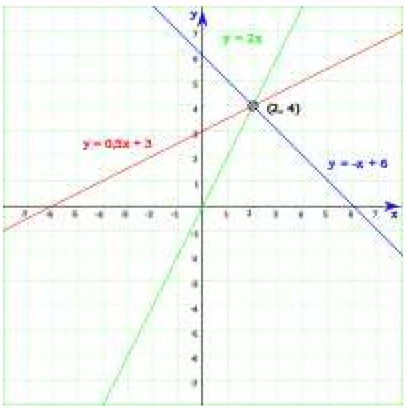
Si sumamos esta ecuación a la segunda del sistema original, obtenemos una nueva ecuación donde la incógnita $y$ha sido reducida y que, en este caso, nos da directamente el valor de la incógnita x:

$$\begin{array}{rrcr} -4x & -6y & = & -10 \\ 5x & +6y & = & 4 \\ \hline x & & = & -6 \end{array}$$

$$x = -6$$

El siguiente paso consiste únicamente en sustituir el valor de la incógnita $x$en cualquiera de las ecuaciones donde aparecían ambas incógnitas, y obtener así que el valor de $y$si sustituimos en la primera ecuación es igual a:

$$\left.\begin{array}{rrcr} 2x & +3y & = & 5 \\ x & & = & -6 \end{array}\right\} \quad \longrightarrow \quad 2(-6) + 3y = 5 \quad \longrightarrow \quad y = \frac{17}{3}$$



Gráfica 6.1.2.- Rectas que pasan por el punto: (2,4)

Consiste en construir la gráfica de cada una de las ecuaciones del sistema. El método (manualmente aplicado) solo resulta eficiente en el plano cartesiano, es decir para un espacio de dimensión.

El proceso de resolución de un sistema de ecuaciones mediante el método gráfico se resuelve en los siguientes pasos:

1. Se despeja la incógnita en ambas ecuaciones.
2. Se construye para cada una de las dos ecuaciones de primer grado obteniendo la tabla de valores correspondientes.
3. Se representan gráficamente ambas rectas en los ejes coordenados.
4. En este último paso hay tres posibilidades:

- Si ambas rectas se cortan, las coordenadas del punto de corte son los únicos valores de las incógnitas (x,y). "Sistema compatible determinado".
- Si ambas rectas son coincidentes, el sistema tiene infinitas soluciones que son las respectivas coordenadas de todos los puntos de esa recta en la que coinciden ambas. «Sistema compatible indeterminado».
- Si ambas rectas son paralelas, el sistema no tiene solución en los reales pero si en los complejos.

Método de Gauss

El método de eliminación de Gauss o simplemente método de Gauss consiste en convertir un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas, en uno escalonado, en el que la primera ecuación tiene n incógnitas, la segunda ecuación tiene n - 1 incógnitas, ..., hasta la última ecuación, que tiene 1 incógnita. De esta forma, será fácil partir de la última ecuación e ir subiendo para calcular el valor de las demás incógnitas.

Eliminación de Gauss-Jordan

Una variante de este método, denominada eliminación de Gauss-Jordan, es un método aplicable únicamente a los sistemas lineales de ecuaciones, y consistente en triangular la matriz aumentada del sistema mediante transformaciones elementales, hasta obtener ecuaciones de una sola incógnita, cuyo valor será igual al coeficiente situado en la misma fila de la matriz. Este procedimiento es similar al anterior de reducción, pero ejecutado de manera reiterada y siguiendo un cierto orden algorítmico.

Regla de Cramer

La regla de Cramer da una solución para sistemas compatibles determinados en términos de determinantes y adjuntos dada por:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(\mathbf{A})}$$

Donde Aj es la matriz resultante de remplazar la j-ésima columna de A por el vector columna b. Para un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$\begin{cases} a\,x & + & b\,y & = e \\ c\,x & + & d\,y & = f \end{cases}$$

La regla de Cramer da la siguiente solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ec}{ad - bc}$$

Nota: Cuando en la determinante original det(A) el resultado es 0, el sistema indica múltiples o sin coincidencia.

Algoritmos numéricos

La eliminación de Gauss-Jordan es un algoritmo numérico usado para una gran cantidad de casos específicos, aunque posteriormente se han desarrollado algoritmos alternativos mucho más eficientes. La mayoría de estos algoritmos mejorados tienen una complejidad computacional de $O(n^2)$ (donde n es el número de ecuaciones del sistema). Algunos de los métodos más usados son:

- Para los problemas de la forma Ax = b, donde A es una matriz de Toeplitz simétrica, se puede utilizar la recursión de Levinson o alguno de los métodos derivados de este. Un método derivado de la recursión de Levinson es la recursión de Schur, que es ampliamente usado en el campo del procesamiento digital de señales.
- Para los problemas de la forma Ax = b, donde A es una matriz singular o casi singular, la matriz A se descompone en el producto de tres matrices en un proceso llamado descomposición en valores singulares.

Cuando consideramos ecuaciones lineales cuyas soluciones son números racionales, reales o complejos o más generalmente un cuerpo $\mathbb{K}$, la solución puede encontrarse mediante Regla de Cramer. Para sistemas de muchas ecuaciones la regla de Cramer puede ser computacionalmente más costosa y suelen usarse otros métodos más "económicos" en número de operaciones como la eliminación de Gauss-Jordan y la descomposición de Cholesky. Existen también métodos indirectos (basados en iteraciones) como el método de Gauss-Seidel.

Si el cuerpo es infinito (como es el caso de los números reales o complejos), entonces solo puede darse una de las tres siguientes situaciones:

- El sistema no tiene solución (en dicho caso decimos que el sistema está sobredeterminado o que es incompatible).
- El sistema tiene una única solución (el sistema es compatible determinado).
- El sistema tiene un número infinito de soluciones (el sistema es compatible indeterminado).

Solución de sistemas lineales en un anillo

Los métodos para resolver el sistema (1) sobre un anillo son muy diferentes a los considerados anteriormente. De hecho la mayoría de métodos usados en cuerpos, como la regla de Cramer, son inaplicables en anillos debido a que no existen inversos multiplicativos.

La existencia de solución del sistema (1) sobre los enteros requiere varias condiciones:

1. Para cada *i* $\mathrm{mcd}(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ es divisor de b_i.
2. Si la condición anterior se cumple para un determinado *i* existe un conjunto de enteros $\mathcal{S}_i$ formado por el conjunto de enteros que satisface la *i*-ésima ecuación, y existirá solución si la intersección $\mathcal{S}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{S}_n \neq \varnothing$.